Groupe A

MATHÉMATIQUES I

Durée : 6 heures

Conventions sur la droite numérique achevée

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble totalement ordonné obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ un plus grand élément noté $+\infty$ et un plus petit élément noté $-\infty$. Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les éléments finis de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ est non majorée on convient que sa borne supérieure est $+\infty$, de même si elle est non minorée on convient que sa borne inférieure est $-\infty$.

Préambule, notations

Tout au long de ce problème on considère un espace vectoriel réel E, non réduit à zéro, muni de deux formes bilinéaires symétriques a et b. On suppose que la forme a est définie positive, c'est-à-dire :

$$a(x, x) > 0 \text{ pour tout } x \neq 0 \text{ dans E}$$

L'application : $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \multimap [a(x, x)]^{\frac{1}{2}}$ est donc une norme sur E que l'on note $\| \ \|$.

On note respectivement $M(a, b)$ et $m(a, b)$ la borne supérieure et la borne inférieure du rapport $\dfrac{b(x, x)}{a(x, x)}$ lorsque x décrit $E - \{0\}$:

$$M(a, b) = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{b(x, x)}{a(x, x)} \qquad m(a, b) = \inf_{x \in E - \{0\}} \frac{b(x, x)}{a(x, x)}.$$

S'il n'y a pas de doute quant au choix de a et b on abrégera les notations $M(a, b)$ et $m(a, b)$ en M et m.

Soit E′ un sous-espace vectoriel non nul de E, on note $a|_{E'}$, et $b|_{E'}$, les restrictions à E′ de a et b. On pourra abréger les notations $M(a|_{E'}, b|_{E'})$, $m(a|_{E'}, b|_{E'})$ en M(E′), m(E′); $M(a, b)$ et $m(a, b)$ pourront donc aussi être notés M(E) et m(E).

On ne fait *a priori* aucune hypothèse sur la dimension de E, si E n'est pas de dimension finie, on pose dim $E = +\infty$.

Enfin, l'hypothèse (H) ci-dessous, que l'on ne fait pas *a priori*, sera introduite en certains points de l'énoncé :
(H) il existe un endomorphisme T de E tel que $b(x, y) = a(x, Ty)$ pour tous x, y de E.

Il est clair que si un tel endomorphisme existe, il est uniquement déterminé.

Les parties IV, V et VI *sont indépendantes de la partie* III. *On pourra éventuellement traiter la partie* VI *en admettant les résultats des parties* IV *et* V.

I

Montrer que si l'espace E est de dimension finie, alors $M(a, b)$ et $m(a, b)$ sont finis c'est-à-dire que le rapport $\dfrac{b(x, x)}{a(x, x)}$ est borné supérieurement et inférieurement lorsque x décrit $E - \{0\}$.

II

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Si $k \leqslant \dim E$, on note $M_k(a, b)$ la borne supérieure des $m(a|_F, b|_F)$ lorsque F décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E :

$$M_k(a, b) = \sup_{\dim F = k} m(F) ;$$

si $k > \dim E$ (ce qui ne peut arriver que dans le cas où E est de dimension finie) on convient que $M_k(a, b)$ est $-\infty$.

Il est à remarquer que $M_1(a, b)$ coïncide avec $M(a, b)$. S'il n'y a pas de doute quant au choix de a et b on abrégera la notation $M_k(a, b)$ en M_k.

Soit E′ un sous-espace vectoriel non nul de E, on pourra abréger la notation $M_k(a|_{E'}, b|_{E'})$ en M_k(E′); $M_k(a, b)$ pourra donc encore être noté M_k(E).

1° Montrer l'inégalité $M_k(a, b) \geqslant M_{k+1}(a, b)$.

2° Soit E′ un sous-espace vectoriel non nul de E; montrer l'inégalité $M_k(E') \leqslant M_k(E)$.

On suppose en outre que E′ est de codimension 1 (c'est-à-dire que l'espace vectoriel quotient E/E′ est de dimension 1); montrer l'inégalité $M_k(E') \geqslant M_{k+1}(E)$.

3° On suppose que E est de dimension finie n. Soient $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et A, B les matrices respectives de a et b relatives à cette base. Exprimer $M_k(a, b)$ en fonction de A et B [on commencera à étudier le cas où A est l'identité et où B est diagonale].

.../...

ECOLES NORMALES SUPERIEURES SEVRES & ULM
1962
M 1

III

Dans cette partie, on prend pour E l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. On se donne une forme linéaire $L : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout polynôme P non nul, $L(P^2)$ soit strictement positif et on prend pour a et b les deux formes bilinéaires symétriques ci-dessous :

$$a(P, Q) = L(PQ)$$
$$b(P, Q) = L(XPQ)$$

On note enfin E_n le sous-espace vectoriel de E formé du polynôme nul et des polynômes non nuls de degré strictement inférieur à n, n désignant un entier supérieur ou égal à 1.

1° Soit μ un réel, déterminer les formes linéaires $u : E_n \to \mathbb{R}$ telles que $u(XP) = \mu\, u(P)$ pour tout P de E_{n-1}.

2° Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'il existe $2n$ nombres réels, $\mu_{1,n}$, $\mu_{2,n}$, ..., $\mu_{n,n}$ et $\gamma_{1,n}$, $\gamma_{2,n}$, ..., $\gamma_{n,n}$, avec $\mu_{k,n} \geqslant \mu_{k+1,n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, tels que pour tout polynôme R de E_{2n} on ait la formule suivante :

$$L(R) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k,n}\, R(\mu_{k,n})$$

[On montrera tout d'abord qu'il existe une telle formule pour les polynômes R de la forme PQ et XPQ, P et Q parcourant E_n. Pour cela on montrera qu'il existe n formes linéaires $u_k : E_n \to \mathbb{R}$, k de 1 à n, telle que $a(P, Q)$ soit la somme $\sum_{k=1}^{n} u_k(P)\, u_k(Q)$ et $b(P, Q)$ une combinaison linéaire des $u_k(P)\, u_k(Q)$].

Montrer l'unicité des $2n$ nombres réels $\mu_{k,n}$, $\gamma_{k,n}$, et les inégalités :

$\mu_{k,n} > \mu_{k+1,n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $\gamma_{k,n} > 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

3° Montrer les inégalités $\mu_{k,n} > \mu_{k,n-1} > \mu_{k+1,n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

4° Montrer qu'il existe une et une seule suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes, avec P_n unitaire de degré n (en particulier $P_0 = 1$), telle que $L(P_m P_n) = 0$ pour $m \neq n$. Quelles sont les racines du polynôme P_n ($n \geqslant 1$)?

5° Soient α, β deux nombres réels avec $\alpha < \beta$ et $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive ou nulle mais non identiquement nulle. On prend dans cette question pour L la forme linéaire définie par

$$L(P) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, P(x)\, dx.$$

Montrer les inégalités $\alpha \leqslant \mu_{k,n} \leqslant \beta$.

Soit $k \geqslant 1$ un entier fixé; déterminer la limite de la suite : $n \longrightarrow \mu_{k,n}$ $(n \geqslant k)$. [On pourra considérer le sous-espace de E_n formé des polynômes $(X - \alpha)^{n-k}P$, P parcourant E_k].

IV

On revient à la situation générale décrite dans le préambule et le début de la partie II. On suppose en outre que $M(a, b)$ est fini.

1° On suppose dim $E \geqslant 2$. Soient x, y deux éléments de E tels que

$$\| x \| = 1, \| y \| = 1 \text{ et } a(x, y) = 0$$

Montrer l'inégalité :

$$b(x, x) + b(y, y) \leqslant M + M_2$$

2° On suppose dim $E \geqslant 2$. Soient x, y deux éléments de E tels que

$$\| x \| = 1, \| y \| = 1$$

Montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(M - M_2) \inf(\| x - y \|^2, \| x + y \|^2) \leqslant [M - b(x, x)] + [M - b(y, y)]$$

3° En déduire que si l'on a l'inégalité $M > M_2$ il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que

$$\| x_n \| = 1$$
$$\lim b(x_n, x_n) = M$$
(x_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\| \ \|$

Que peut-on dire de deux suites (x_n) et (y_n) ayant les propriétés ci-dessus?

V

On suppose que $M(a, b)$ et $m(a, b)$ sont finis et que l'hypothèse (H) est vérifiée.

1° Montrer l'inégalité :

$$\| Tx - Mx \|^2 \leqslant (M - m)[M \| x \|^2 - b(x, x)]$$

. . . / . . .

En déduire que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i. M et m sont finis.

ii. l'endomorphisme T est continu pour la norme $\| \ \|$ de E.

2° Montrer que si $M > M_2$ il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que :

$\| x_n \| = 1$ pour tout n

(x_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\| \ \|$

la suite $(Tx_n - Mx_n)$ converge vers zéro (pour la norme $\| \ \|$)

VI

On prend maintenant pour E l'espace des fonctions continues : $[0,1] \to \mathbb{R}$. Soient f et g deux éléments de E. On pose :

$$a(f,g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

$$b(f,g) = \int_0^1 (1-x) \left(\int_0^x f(t)\, dt \right) \left(\int_0^x g(t)\, dt \right) dx .$$

On pose donc également $\| f \| = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

1° Montrer que $M(a, b)$ est fini et déterminer $m(a, b)$.

2° Montrer que l'hypothèse (H) est vérifiée et expliciter l'endomorphisme T de E correspondant.

Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction f de E et tout x de [0,1] on ait l'inégalité :

$$| (Tf)(x) | \leqslant C \| f \|$$

3° Soit E′ le sous-espace de E formé des fonctions f telles que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

Montrer l'inégalité $M(E') \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27}$.

[On pourra remarquer que pour tout θ de [0,1] et tout f de E′ on a

$$b(f,f) = \int_0^\theta (1-x) \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)^2 dx + \int_\theta^1 (1-x) \left(\int_x^1 f(t)\, dt \right)^2 dx].$$

Montrer l'inégalité $M > M_2$.

4° Montrer qu'il existe une unique fonction continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\| \varphi \| = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi(x)\, dx > 0$$

$$b(\varphi, \varphi) = M \quad \text{ou} \quad T\varphi = M\varphi.$$

Montrer que φ est indéfiniment dérivable.

Montrer que φ est positive ou nulle. En quels points de [0,1] s'annulle-t-elle?

5° Soit λ un nombre réel avec $\lambda < 9\sqrt{3}$. Déterminer les fonctions $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables qui vérifient :

$$\psi''(x) + \lambda (1-x)\, \psi(x) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi'(1) = 0$$

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique fonction deux fois dérivable vérifiant :

$$\gamma''(x) + x\, \gamma(x) = 0$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\gamma'(0) = 0$$

Quels sont les zéros de γ dans l'intervalle $]-\infty, 3^{\frac{5}{6}}[$? Quelle relation existe-t-il entre les fonctions ψ et γ?

M 3 1 57 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail